Reinhard Winkler
TU Wien

Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus

„Für jedes $n = 1, 2, 3,...$ gilt“ – Mathematikbücher sind voll von Sätzen, die so beginnen. Was aber bedeuten die drei ominösen Punkte „...“? Natürlich – so ein spontaner Gedanke – wissen wir, was damit gemeint ist. Nämlich, dass die Behauptung nicht nur für 1, 2 und 3 gilt, sondern für ALLE natürlichen Zahlen. Begnügen wir uns mit dieser Erklärung, könnte uns ein begabter Schüler mit einigen simplen, aber nur scheinbar naiven Fragen einigermaßen in Verlegenheit bringen:

Wer hat schon alle natürlichen Zahlen persönlich kennengelernt? (Schließlich gibt es unendlich viele!) Wie lässt sich allgemein sagen, was wir unter einer natürlichen Zahl überhaupt verstehen? Und wie können wir über diese unendlich vielen Dinge gar etwas beweisen (etwa die allgemeingültige Formel $a + b = b + a$), wo doch alle möglichen Werte für a und b einzeln zu überprüfen gar nicht möglich ist?

Schnell wird einem klar, dass diese höchst spannenden Fragen an den fundamentalsten Grundlagen der Mathematik rühren. Die Menschheit musste bis tief ins 19. Jahrhundert warten, bis Giuseppe Peano mit den nach ihm benannten Axiomen für die natürlichen Zahlen eine ziemlich befriedigende Antwort gab. Im Wesentlichen fand er mathematisch hieb- und stichfeste Formulierungen für folgende Tatsachen: Die Zahlenreihe fängt an einem Punkt (0 oder 1) an; von jeder Zahl kann man zu einer nächsten weitergehen; es gibt dabei keine Wiederholungen; alle natürlichen Zahlen werden auf diese Art und Weise erreicht. (Die letzte dieser Aussagen entspricht dem Induktionsprinzip und verdient besonderes Augenmerk, weil sie gewissermaßen den entscheidenden Griff der Mathematik in die Unendlichkeit darstellt.)

Kritische Geister finden aber sogar an Peanos genialem Konzept noch Mängel: Seine Axiome beschreiben zwar sehr gut das System der natürlichen Zahlen als Ganzes, geben aber keine Auskunft darüber, was denn die einzelnen Zahlen, jede für sich, sind. Nichts an ihnen klärt uns z. B. darüber auf, dass jede natürliche Zahl auch eine Bedeutung hat, nämlich die einer Anzahl. Versucht man sich an Definitionen der Zahlen 1, 2 und 3, so stehen die Erfolgsaussichten noch relativ gut. Bei größeren Zahlen verliert man angesichts der Umständlichkeit aber doch schnell die Lust daran. Schon über 1, 2, 3 hinaus zu zählen, kann also wahrlich anstrengend sein. Und unendlich viele Zahlen erfassen zu wollen, erscheint hoffnungslos.

Die Mathematik des 20. Jahrhunderts kann mithilfe der (vielgeschmähten aber dennoch großartigen) Mengenlehre auch diese Schwierigkeiten aus dem Weg räumen. Wieder spielt das Induktionsprinzip eine ganz entscheidende Rolle, nun aber nicht mehr als Axiom, sondern (wie auch die anderen Axiome von Peano) als beweisbarer Satz.

Ob mit dem höchst eleganten und heutzutage als Grundlage anerkannten Zugang von John von Neumann alle Fragen zufriedenstellend und ein für alle Male gelöst sind, ist eine philosophische Frage. Die Meinungen darüber gehen auch unter Mathematiker/inne/n auseinander. Bilden Sie sich Ihr eigenes Urteil! Im Vortrag versuche ich, Ihnen einiges Material dafür in die Hand zu geben.